数理解析研究所講究録
103 巻 1970 年 67-72

直交群の表現環について

大阪市大　南 春男

1．コンパクト Lie 群 G の複素表現環を $R(G)$ で表わす．$O(2n+1)$ は $SO(2n+1)$ と Z_2 の直積であるから，$R(O(2n+1))$ は $R(SO(2n+1))\otimes R(Z_2)$ に同形である．ところが $O(2n)$ は $SO(2n)$ と Z_2 の半直積であるので少々事情が異なる．ここでは次の定理の証明の概略を述べる．

定理 1．$R(O(2n)) \cong Z[\lambda^1\rho_{2n},\cdots,\lambda^n\rho_{2n},\gamma_{2n}]/(\lambda^n\rho_{2n}(\gamma_{2n}-1),\ \gamma_{2n}^2-1)$，

ここで，$\lambda^k\rho_{2n}$ (k 1, 2, ⋯ n) は標準的な表現 $\rho_{2n}: O(2n)\to U(2n)$ の k 重外積巾を表わし，また γ_{2n} は行列式が定める 1 次元の表現を示す．

2．$\iota: H\to G$ をコンパクト Lie 群 G の閉部分群の包含写像とするとき，$\iota^*: R(G)\to R(H)$ で制限写像を表わし，また $\iota_*: R(H)\to R(G)$ で誘導表現写像[1], [4]を表わす．

$SO(2n)$ 及び $O(2n-1)$ の $O(2n)$ への包含写像をそれぞれ i, j と

するとき Segal の結果([4], p.119)から次の等式をえる.

(1) $i_*(1)=1+\bar{\xi}_{2n}$, (2) $j_*(1)=1-\bar{\xi}_{2n}$.

$\varepsilon_{2n}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \in O(2n)$ とおく. ρ を $SO(2n)$ の表現とするとき

$\rho'(g)=\rho(\varepsilon_{2n} g \varepsilon_{2n})$, $g \in SO(2n)$, で定義される表現 ρ' を $C_{\varepsilon_{2n}}(\rho)$ で表わす.

補題 1. ρ を既約な $O(2n)$ の表現とする. このとき $i^*(\rho)$ が既約な $SO(2n)$ の表現であるか, あるいは $i^*(\rho)=\rho_1 \oplus \rho_2$, ただし ρ_k ($k=1, 2$) は既約な $SO(2n)$ の表現を示す. 更に後者の場合 $\rho_2 \cong C_{\varepsilon_{2n}}(\rho_1)$ かつ $i_*(\rho_1) \cong \rho$ が成立する.

略証明. i_* は $R(O(2n))$-準同形であるから, (1)より

$$i_*(i^*(\rho)) = \rho(1+\bar{\xi}_{2n})$$

をえる. 一方 Bott による i_* の定義([1], p.169)から, ρ が $\rho \otimes \bar{\xi}_{2n}$ に同値でないとき

$$i_*(i^*(\rho))=\dim_{\mathbb{C}} Hom_{SO(2n)}(i^*(V), i^*(V))(\rho+\rho\otimes\bar{\xi}_{2n})+\cdots$$

をえる. したがって両者を比較すれば $\dim_{\mathbb{C}} Hom_{SO(2n)}(i^*(V), i^*(V)) = 1$ がわかる. ただし, V は ρ の表現空間である. これは $i^*(\rho)$ の既約性を示す. 同様にして ρ が $\rho\otimes\bar{\xi}_{2n}$ に同値なとき $\dim_{\mathbb{C}} Hom_{SO(2n)}(i^*(V), i^*(V))=2$ をえる. これは $i^*(\rho)$ が同値でない既約表現 ρ_k ($k=1, 2$) の和に等しいことを示す. $C_{\varepsilon_{2n}}(\rho_1) \cong \rho_2$ の証明については[2], 定理(49.2)の証明及びその注意を参照されたい

. また $i_*(\rho_1)\cong\rho$ は(1)の証明と同じ方法で示めされる．(終り)

Z_2 を ε_{2n} で生成される $O(2n)$ の部分群とする．ε_{2n} による $R(SO(2n))$ の共役自己同形 $C_{\varepsilon_{2n}}$ で不変な要素から生成される部分多元環を $R(SO(2n))^{Z_2}$ で表わす．このとき次の同形が成立する．

補題2．　$R(SO(2n))^{Z_2}\cong Z[\lambda^1\rho_{2n},\cdots,\lambda^n\rho_{2n}]$，

ただし，記号は[3]にしたがう．

証明．[3]，§13の命題(9.4)と定理(10.3)による．

G をコンパクト Lie 群とする．このとき Cartan 部分群(i.e. その正規化部分群との指標が有限であるような位相的巡回群)が存在し，その共役類の個数は有限である([4]，p.115)．而も制限写像

(3)　$R(G)\to\sum_S R(S)$

は単射である．ただし，S は Cartan 部分群の共役類の代表元を表わす．とくに $O(2n)$ については，その Cartan 部分群の共役類は2個で，かつ $SO(m)$ の極大輪環群を $TSO(m)$ で表わすときその代表元として $TSO(2n)$ 及び $TSO(2n-2)\times Z_2$ をとることができる．

定理1の等式の右辺を R_n とおく．最初に定理1において $n=1$ の場合を証明する．

定理2．　$R(O(2))\cong R_1$

証明．$\xi_2^2=1$ は ξ_2 の定義から明らか．また(3)を用いれば

$\rho_2 \tilde{\rho}_2 = \rho_2$ 及び R_1 が $R(O(2))$ の部分多元環なることがわかる．ρ を既約な $O(2)$ の表現とする．補題1は $i^*(\rho)$ が2つの型をもつことを示す．前者の場合，$i^*(\rho)$ は既約である．ところが $C_{\varepsilon_2}(i^*(\rho)) \cong i^*(\rho)$，　かつ $SO(2)$ が可換群なることから $i^*(\rho)$ は1次元である，それ故 $i^*(\rho)=1$，よって(3)を用いれば $\rho=1$ または $\rho=\tilde{\rho}_2$ なることが分かる．後者の場合，$i_*(\rho_1)=\rho$ なる既約な $SO(2)$ の表現 ρ_1 が存在する．そこで α を $SO(2)$ の標準的な自明でない1次元表現とするとき $i_*(\alpha^{\pm m})$ $(m \geqq 0)$ が R_1 に含まれることが分かれば証明が終る．これは(3)及び(2)の証明と同じ方法によって証明される．

補題3．R_n は $R(O(2n))$ の部分多元環である $(n \geq 2)$．

略証明．包含写像 $k: SO(2n-2) \times O(2) \to O(2n)$ を考える．

$$k^*: R(O(2n)) \longrightarrow R(SO(2n-2) \times O(2))$$

は $O(2n)$ と $SO(2n-2) \times O(2)$ が同一の Cartan 部分群 $TSO(2n)$，$TSO(2n-2) \times Z_2$ をもつから(3)によって単射である．ところで定理2及び補題2から k^* の像は R に含まれることが分かる．ただし，$R = Z[\lambda^1 \rho_{2n-2}, \cdots, \lambda^{n-1}\rho_{2n-2}, \rho_2, \tilde{\rho}_2]/(\rho_2(\tilde{\rho}_2 - 1), \tilde{\rho}_2^2 - 1)$．そこで $R(O(2n))$ の生成元の k^* の像を調べることによって命題が証明される．

補題4．　$j^*(R_n) = R(O(2n-1))$．

証明．$O(2n-1)$ が $SO(2n-1) \times Z_2$ に同形なることによる．

3. 定理1の証明

任意の $x \in R(O(2n))$ に対して，(1)，(2)から

$$i_*(i^*(x)) = (1+\xi_{2n})x \quad , \quad j_*(j^*(x)) = (1-\xi_{2n})x$$

をえる．補題2及び補題4によって上式の左辺は R_n に含まれることが分かる．何故ならば i^*, j^* の R_n への制限を考えるとき

$$i^* : R_n \longrightarrow R(SO(2n))^{Z_2} \quad , \quad j^* : R_n \longrightarrow R(O(2n-1))$$

は全射である．したがって $i^*(y_1) = i^*(x)$，$j^*(y_2) = j^*(x)$ を充たす．R_n の元 y_1，y_2 が存在する．よって

$$i_*(i^*(x)) = y_1(1+\xi_{2n})$$

$$j_*(j^*(x)) = y_2(1-\xi_{2n})$$

をえる．ところが $y_1(1+\xi_{2n})$，$y_2(1-\xi_{2n})$ は R_n の元である．故に $2x \in R_n$ が分かる．ここで次の補題が証明されれば $x \in R_n$ は明らかである．

補題5．$\pi^*(R_n)$ は R の直和因子である．

証明．R の任意の元が

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k \bar{\rho}_2^k \quad , \quad f_k \in \pi^*(R_n)$$

なる型に表わされることを用いる．

文　献

[1] R. Bott : The index theorem for homogeneous differential operators,

in S. S. Cairns, Differential and combinatorial topology, a symposium in honor of Marston Morse, Princeton, 1965. 167 - 186.

[2] C. W. Curtis and I. Reiner : Representation theory of finite groups and associative algebras, Pure and applied mathematics vol. XI, J. Wiley and Sons, Inc., 1962.

[3] D. Husemoller : Fibre bundles, MacGraw-Hill, Inc., 1966.

[4] G. Segal : The representation ring of a compact Lie group, Publ. Math. Inst. des Hautes Etudes Scient. (Paris), 34 (1968), 113 - 128.